Colles de Maths - semaine 17 - MP-MP*
Lycée Aux Lazaristes

Julien Allasia - ENS de Lyon

Exercice 1 Résoudre l'équation différentielle

$$x(x-a)\,y' + (2x-a)\,y = \sin x,$$

où $a > 0$ et $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 2 Résoudre pour $x > 0$ l'équation différentielle

$$x^2\,y'' + 3x\,y' + y = 0.$$

Indication : On pourra chercher une première solution sous la forme d'une fonction puissance, puis trouver une autre solution en utilisant le Wronskien ou un changement de variable.

Exercice 3 Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ telle que $f(x) + f'(x) \xrightarrow[x\to\infty]{} 0$. Montrer que $f(x) \xrightarrow[x\to\infty]{} 0$.

Exercice 4 Soit $u \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ telle que $|u| \leqslant 1$ et $u(0)^2 + u'(0)^2 = 4$. Montrer que la fonction $u + u''$ s'annule en un point de $\mathbb{R}$.

Exercice 5 Résoudre l'équation différentielle $y'^2 = y^2$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 6 Soit q est une fonction continue positive. Montrer que pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, l'équation différentielle $y'' - q(x)\,y = 0$ admet une unique solution telle que $y(0) = a$ et $y(1) = b$.

Exercice 7 Soit q une fonction continue telle que $\displaystyle\int_0^\infty x\,|q(x)|\,\mathrm{d}x < \infty$. On considère l'équation différentielle

$$y'' + q(x)\,y = 0.$$

Montrer qu'il existe une unique solution f telle que $f(x) \xrightarrow[x\to\infty]{} 1$ et $f'(x) \xrightarrow[x\to\infty]{} 0$.

Exercice 8 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que pour toute valeur propre λ de A, $\lambda \notin 2i\pi\mathbb{Z}$. Soit $B : \mathbb{R} \to \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ une fonction continue et 1-périodique. Montrer que le système

$$X' = AX + B(t)$$

possède une unique solution 1-périodique.

Exercice 9 Montrer que toute solution de l'équation différentielle

$$y'' + \left(1 + \frac{4}{x^2}\right)\,y = 0$$

sur $\mathbb{R}_+^*$ vérifie

$$y(x) \underset{x\to+\infty}{=} A\cos x + B\sin x + o(1).$$

Indication : On pourra utiliser le lemme de Gronwall : si y est continue, b est continue positive et $C \in \mathbb{R}$, alors l'inégalité

$$\forall x \geqslant 0,\ \ y(x) \leqslant C + \int_0^x b(t)\,y(t)\,\mathrm{d}t$$

"se résoud en"

$$\forall x \geqslant 0,\ \ y(x) \leqslant C\,\exp\left(\int_0^x b(t)\,\mathrm{d}t\right).$$